

Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft
ANWENDUNGSBEZOGENE OPTIMIERUNG UND STEUERUNG

Verbesserungen in der Laufzeitanalyse
des Simplexverfahrens

von

Karl Heinz Borgwardt, Gabriele Joas

Report No. 419

1992

Institut für Mathematik

UNIVERSITÄT AUGSBURG

Universitätsstraße 2

D-8900 Augsburg

Verbesserungen in der Laufzeitanalyse des Simplexverfahrens

Karl Heinz Borgwardt, Gabriele Joas

Zusammenfassung

In dieser Arbeit verbessern wir die von Borgwardt [1] angegebene obere Schranke für die durchschnittliche Laufzeit des Simplexverfahrens zur Lösung von Problemen der Art

$$\begin{array}{ll}\max & v^T x \\ \text{unter} & a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1 \\ \text{mit} & v, x, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad m \geq n.\end{array}$$

Wir beschränken uns dabei auf den asymptotischen Fall, d.h. auf Probleme mit einer sehr großen Anzahl m ($m \rightarrow \infty$) von Restriktionen bei festgehaltenem n . Die bekannte Schranke kann hier um einen Faktor $1/\sqrt{n}$ verbessert werden.

Einleitung

Wir betrachten Probleme der Form

$$\begin{aligned} & \max v^T x \\ & \text{unter } a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1 \\ & \text{mit } v, x, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n \quad \text{und } m \geq n. \end{aligned}$$

In dieser Arbeit analysieren wir einen Gesamtalgorithmus von Borgwardt [1], der Probleme obiger Art löst, indem er sukzessiv $n - 1$ Unterprobleme der Dimensionen $k = 2, \dots, n$ bearbeitet. Ergebnisse einer Stufe dienen als Startwerte in der nächst höheren. Jedes der $n - 1$ Unterprobleme lösen wir mit einer bestimmten Variante des Simplexalgorithmus, der **Schatteneckenvariante**, die einer Modifikation des Gass-Saaty-Algorithmus [2] nahekommt. Nach Stufe $n - 1$ liegt eine Ecke des ursprünglichen Problems vor, d.h. die Phase I des Simplexalgorithmus ist abgeschlossen. Die letzte Stufe entspricht dann seiner Phase II.

Für alle erfolgreichen probabilistischen Untersuchungen des Simplexalgorithmus diene die Schatteneckenvariante als Grundlage. Borgwardt [1] zeigte, daß die durchschnittliche Laufzeit dieser Variante in jeder einzelnen Stufe polynomial ist, falls die Inputdaten a_1, \dots, a_m, u und v unabhängig, identisch rotationssymmetrisch verteilt sind. Demnach besitzt auch der Gesamtalgorithmus eine polynomiale Oberschranke.

Diese Untersuchungen wurden zum einen für Probleme mit einer moderaten Anzahl m von Restriktionen, zum anderen für solche mit sehr vielen Restriktionen durchgeführt. Bei letzteren stellte man Grenzbetrachtungen ($m \rightarrow \infty$) bei festem n an. In beiden Fällen konnte also eine (in m und n) polynomiale obere Schranke angegeben werden. Die asymptotische Oberschranke ist schärfer als die im moderaten Fall. Im Gegensatz zum moderaten Fall müssen hier nämlich nicht alle Dimensionspaare (m, n) betrachtet werden, so daß die Abschätzungen technisch einfacher sind. Empirische Tests zeigen, daß die asymptotische Oberschranke das wahre Laufzeitverhalten sogar besser widerspiegelt.

In diesem Paper greifen wir den asymptotischen Fall nochmals auf, und verbessern die obere Schranke hierfür um einen Faktor $1/\sqrt{n}$.

Als Vorbereitung dazu wird im ersten Kapitel der Schatteneckenalgorithmus aus primaler und polarer Sicht vorgestellt.

Im darauf folgenden Abschnitt wird die Relevanz des Schatteneckenalgorithmus für den Gesamtalgorithmus erörtert.

Um nun eine probabilistische Untersuchung durchführen zu können, muß der Wahrscheinlichkeitsraum der Inputdaten spezifiziert werden, was zu Beginn des 3. Kapitels geschieht. Danach zitieren wir die Ergebnisse von Borgwardt und erläutern ihren Zugang.

Der vierte Teil beinhaltet die Verbesserung der oberen asymptotischen Schranke.

Zuletzt weisen wir nach, daß für bestimmte Verteilungen, z.B. für die Gleichverteilung auf der Sphäre, die asymptotische Ober- und Unterschranke die gleiche Größenordnung in m und n besitzen, d.h. daß die Schranken scharf sind.

Bei allen Betrachtungen wurde besonderer Wert auf die dahinterstehende Geometrie gelegt, da sie sehr viel zum Verständnis der Vorgänge im Simplexverfahren beiträgt.

1. Der Schatteneckenalgorithmus

Da die Phase I des Gesamtalgorithmus wesentlich auf seiner Phase II aufbaut, erklären wir zunächst die Funktionsweise der Phase II, und veranschaulichen die dahinterstehende Geometrie.

Wir beschäftigen uns von nun an mit Problemen der Form:

$$\begin{aligned} & \max v^T x \\ & \text{unter } a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1 \\ & \text{mit } v, x, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n \quad \text{und } m \geq n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Außerdem sei ein sogenannter Startvektor $u \in \mathbb{R}^n$ (seine Bedeutung wird später erklärt) gegeben. Die Einführung des Vektors u in diesem Kapitel ist didaktisch zur Erläuterung von Phase II nützlich. Wir werden an anderer Stelle noch sehen, wie sich dieser Vektor implizit aus der Problemstellung (1.1) ergibt, und damit den Gesamtalgorithmus prägt.

Alle unsere Probleme sollen eine gewisse Nichtentartungsbedingung erfüllen, d.h.:

$$\begin{aligned} & \text{Je } n+1 \text{ Elemente aus } \{a_1, \dots, a_m\} \text{ sind in allgemeiner Lage} \\ & \text{(primale Nichtentartung), und jede } n\text{-elementige Teilmenge von} \\ & \{a_1, \dots, a_m, u, v\} \text{ ist linear unabhängig (polare Nichtentartung).} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Solche Probleme können durch den Simplexalgorithmus gelöst werden.

Mit $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1\}$ bezeichnen wir den Zulässigkeitsbereich des Problems, der ein Polyeder darstellt, und deshalb **primales Polyeder** genannt wird. $Y := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq 1 \quad \forall x \in X\}$ ist das dazugehörige **polare Polyeder**. Y kann auf folgende einfache Art und Weise charakterisiert werden.

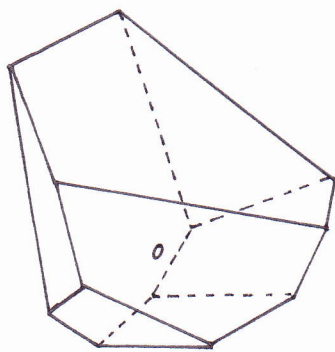
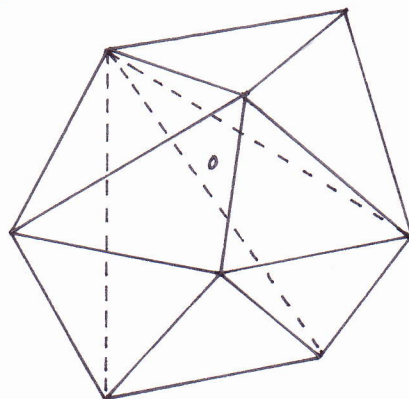
Lemma 1: $Y = \text{KH}(0, a_1, \dots, a_m)$, wobei KH die konvexe Hülle bezeichnet.

Zum besseren Verständnis wird in Abbildung 1 ein primales und sein polares Polyeder dargestellt.

Das folgende Lemma verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Primal- und Polarraum. Hier bezeichnen wir mit $\Delta := \{\Delta^1, \dots, \Delta^n\} \subset \{1, \dots, m\}$ eine n -elementige Indexmenge.

Lemma 2: Sei x_Δ eine Ecke von X und $\Sigma(\Delta)$ die konvexe Hülle aller a_{Δ^i} , $\Delta^i \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{\Delta^i}^T x_\Delta = 1$. Dann ist $\Sigma(\Delta)$ eine Facette von Y .

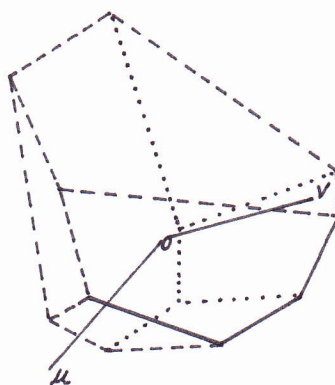
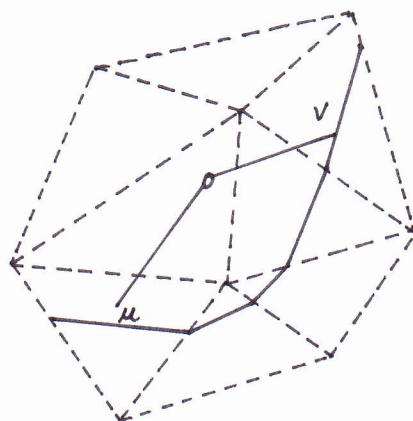
Definition 1: $\Sigma(\Delta)$ heißt Randsimplex von Y .

X  Y **Abb. 1**

Unter unserer Nichtentartungsannahme sind in jeder Ecke x_Δ genau n Restriktionen straff, der zugehörige Randsimplex $\Sigma(\Delta)$ wird also von genau n Vektoren aufgespannt.

Wir wollen nun die Funktionsweise des Schatteneckenalgorithmus geometrisch erläutern.

In Abbildung 2 sehen wir Simplexpfade, die der Schatteneckenalgorithmus zum einen im primalen, zum anderen im polaren Polyeder generiert.

 X  Y **Abb. 2**

Man stelle sich zunächst das primale Polyeder X auf $\text{span}(u, v)$ projiziert vor. Dann

werden diejenigen Ecken von X , deren Bilder $\Gamma(x)$ unter der orthogonalen Projektion Γ auf $\text{span}(u, v)$ wieder Ecken (jetzt des projizierten Polyeders) sind, Schattenecken genannt.

Angenommen, Phase I des Simplexalgorithmus sei bereits abgeschlossen, und eine Ecke x_0 aus X liege vor. Dann soll diese Ecke die gegebene Zielfunktion $u^T x$ auf X maximieren. Wenn nun w den kleineren Winkel zwischen u und v überstreicht, erhalten wir eine Folge von Ecklösungen, die zudem Schattenecken sind. Sei dies die Folge x_0, \dots, x_s . Für jedes x_0, \dots, x_s gibt es dann ein $w_i \in \text{span}(u, v) \setminus \{0\}$, so daß $w_i^T x_i = \max_{x \in X} w_i^T x$, $\forall i = 0, \dots, s$. $\Gamma(x_i)$ und $\Gamma(x_{i+1})$ sind dabei in $\Gamma(X)$ benachbart.

Eine derartige Folge kann auch konstruiert werden, wenn $v^T x$ keine Lösung besitzt. Dann ist x_s der Optimalpunkt zur letzten beschränkten Zielfunktion $w^T x$, $w \in \text{span}(u, v)$. In diesem Fall inzidiert x_s mit einem unbeschränkten Strahl, der $v^T x$ immer weiter verbessert. Das folgende Lemma besagt, daß die Folge der so generierten Schattenecken tatsächlich einen Simplexpfad darstellt, wie ihn die Phase II erzeugen soll.

Lemma 3: Seien x_0, x_1, \dots, x_s die maximalen Ecken bzgl. $w_0^T x, w_1^T x, \dots, w_s^T x$ mit $w_0 = u$ und $\text{arc}(w_i, v) > \text{arc}(w_{i+1}, v)$ für $i = 0, \dots, s-1$. Dann gilt: $v^T x_{i+1} > v^T x_i$.

Nun betrachten wir die Wirkungsweise des Schatteneckenalgorithmus im polaren Polyeder. Hier starten wir im Vektor u und bewegen uns entlang $\text{span}(u, v)$ in Richtung v . Bei dieser Bewegung schneiden wir Randsimplizes $\Sigma(\Delta)$ des polaren Polyeders Y . Jeder Randsimplex wird von genau n Vektoren, die eine Basis des \mathbb{R}^n bilden, aufgespannt. Beim Übergang von einem Randsimplex zum nächsten müssen wir einen Pivotschritt ausführen, d.h. ein Vektor verläßt die Basis, während ein anderer sie betritt. Diese Vektoren werden **Austritts-** bzw. **Eintrittsvektoren** genannt. Bei v angekommen, liegen der optimale Randsimplex und die optimale Basis vor, oder man stellt die Unbeschränktheit des Problems fest. In beiden Fällen bricht dann der Algorithmus ab.

Das Lemma 4 faßt die Ergebnisse für den polaren Fall zusammen.

Lemma 4: Die Randsimplizes, die von $KK(u, v) = \{y \mid y = \lambda u + \rho v, \lambda \geq 0, \rho \geq 0\} \subset \text{span}(u, v)$ geschnitten werden, können eindeutig in einer Folge $\Sigma(\Delta_0), \dots, \Sigma(\Delta_s)$ angeordnet werden, so daß gilt: $\Delta_i \neq \Delta_j$ für $i \neq j$, Δ_i und Δ_{i+1} unterscheiden sich in nur einem Element, und $\text{arc}(z_i, v) \geq \text{arc}(z_{i+1}, v)$ für jedes Paar (z_i, z_{i+1}) mit $z_i \in \Sigma(\Delta_i) \cap \text{span}(u, v)$ und $z_{i+1} \in \Sigma(\Delta_{i+1}) \cap \text{span}(u, v)$.

2. Der Gesamtalgorithmus

Aufbauend auf Phase II, beschreiben wir nun, wie der Gesamtalgorithmus, also Phase I und Phase II, funktioniert.

Dazu definieren wir für $k = 1, \dots, n$ die projizierten LPs I_k :

$$\begin{aligned}
& \max v^T x \\
& \text{unter } a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1 \\
& \text{und } x^{k+1} = 0, \dots, x^n = 0 \\
& \text{mit } v, x, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n \quad \text{und } m \geq n.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Den zu I_k gehörigen Zulässigkeitsbereich bezeichnen wir mit X_k .

Die primale Version des iterativen Gesamtalgorithmus läuft dann folgendermaßen ab:

(2.2) Gesamtalgorithmus:

- 1) Beginne mit $k = 2$, und finde eine Ecke von X_2 .
- 2) Finde eine **maximale** Ecke $(x^1, x^2)^T$ von I_2 durch Anwendung des primalen Schatteneckenalgorithmus. Falls es keine Lösung gibt, gehe zu 7).
- 3) Falls $k = n$, gehe zu 8). Setze $k = k + 1$.
- 4) $(x^1, \dots, x^{k-1}, 0, \dots, 0)^T$ sei eine Optimallösung von I_{k-1} . Dann liegt dieser Vektor auf einer Kante von X_k . Suche nun eine Ecke $(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)^T$ auf dieser Kante.
- 5) Wende den Schatteneckenalgorithmus auf I_k an, wobei die Projektionsebene durch den k -ten Einheitsvektor e_k und v aufgespannt wird. Falls keine Lösung existiert, gehe zu 7).
- 6) Gehe zu 3).
- 7) Das Problem ist unbeschränkt. Gehe zu 9).
- 8) $(x^1, \dots, x^n)^T$ ist Optimalecke.
- 9) STOP.

Bemerkung 1: Im folgenden fassen wir X_k immer als ein Polyeder im \mathbb{R}^k auf, und nicht als ein k -dimensionales Polyeder, das in den \mathbb{R}^n eingebettet ist. Wir haben es dann nur mit k -dimensionalen Vektoren zu tun, wodurch die Schreibarbeit erleichtert wird. Durch diese Sicht der Dinge machen wir keinen Fehler in der folgenden Argumentation.

In Abbildung 3 ist ein Iterationsschritt des Gesamtalgorithmus von Stufe 2 auf Stufe 3 dargestellt.

Bemerkung 2: Schritt 1) des Gesamtalgorithmus ist einfach zu realisieren. Wir wissen, daß der Ursprung für unsere Probleme I_2, \dots, I_n zulässig ist.

Zu I_2 fügen wir die flexibel orientierten Hilfsrestriktionen $-e_1^T x \leq 0$ und $-e_2^T x \leq 0$ hinzu. Diese sind in 0 straff, so daß $-e_1$ und $-e_2$ eine Startbasis im \mathbb{R}^2 ist. Ziel ist es nun, erst e_1

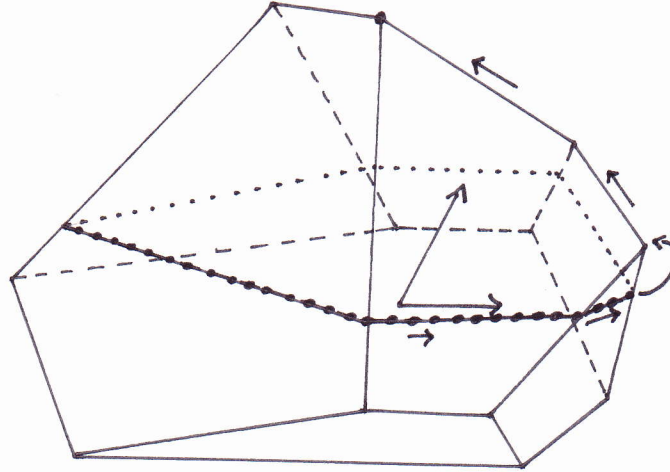


Abb. 3

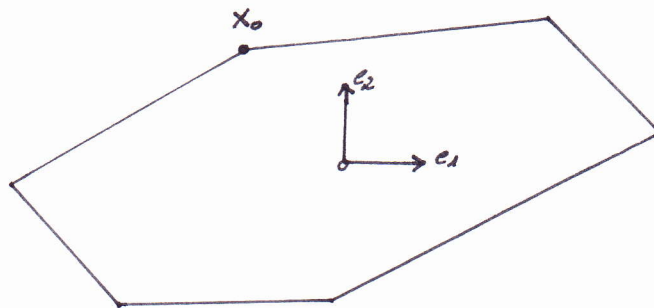


Abb. 4

und dann e_2 aus der Basis zu entfernen, und dafür Originalrestriktionsvektoren a_1, \dots, a_m aufzunehmen. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Bewegung in Richtung e_1 oder $-e_1$ bzw. e_2 oder $-e_2$ erfolgt. Gelingt der Austausch, liegt eine Ecke des Polyeders X_2 in einem der vier Quadranten vor, und die Hilfsrestriktionen können vergessen werden (vgl. Abb. 4).

Ist dieser Austausch der Hilfsrestriktionen gegen die Originalrestriktionen nicht möglich, so ist I_2 , und somit das Gesamtproblem, unbeschränkt (vgl. Abb. 5).

Der Grund für die Einführung eines solch komplizierten Dimensionssteigerungsalgorithmus liegt in seiner guten probabilistischen Auswertbarkeit, worauf wir später noch eingehen werden.

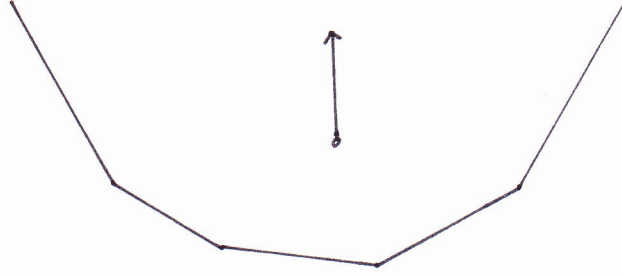


Abb. 5

Eine ausführliche Beschreibung des Schatteneckenalgorithmus sowie die Beweise zu den angegebenen Lemmata findet man in Borgwardt [1].

3. Probabilistische Analyse

3.1 Der Wahrscheinlichkeitsraum

Um eine probabilistische Analyse durchführen zu können, müssen wir ein stochastisches Modell zugrunde legen. Dazu betrachten wir die Matrix der Inputdaten

$$\hat{A} := \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \\ u^T \\ v^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+2)n}$$

des Problems (1.1). Nun fassen wir \hat{A} als Zufallsvariable im Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^{(m+2)n}, \mathcal{A}, P)$ auf. Dabei ist \mathcal{A} die σ -Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen des $\mathbb{R}^{(m+2)n}$ und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das auf \mathcal{A} definiert ist. P ist ein Produktmaß aus $m+2$ Maßen des \mathbb{R}^n , denn wir fordern:

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_m, u, v & \text{ sind} \\ & \text{-unabhängig} \\ & \text{-identisch} \\ & \text{-rotationssymmetrisch im } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ verteilt.} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Diese Verteilung im \mathbf{R}^n ist eindeutig durch ihre Radialverteilungsfunktion F

$$F : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \quad , \quad F(r) := P(\|x\| \leq r)$$

bestimmt. Im folgenden untersuchen wir nur Verteilungen mit beschränktem Träger.

Was nun interessiert, ist die durchschnittliche Anzahl der Pivotschritte, die der Schatteneckenalgorithmus zur Lösung von linearen Optimierungsproblemen des Typs (1.1) unter diesem Verteilungsmodell benötigt.

3.2 Eine Integralformel

Wie in Kapitel 2 erläutert, läuft der Gesamtalgorithmus in $n-1$ Stufen (Dimensionen 2 bis n) ab. Jedesmal wird der Schatteneckenalgorithmus angewandt. Der Gesamtaufwand errechnet sich als die Summe der Pivotschritte in den einzelnen Stufen und der n Schritte für die Dimensionsänderung.

Wir berechnen zunächst den Aufwand in einer einzelnen Stufe. Dafür bietet sich die letzte an, bei der die Ebene $\text{span}(e_n, v)$ benutzt wird. Dies entspricht der Berechnung des Aufwandes in Phase II.

Sei S die Anzahl der Randsimplizes von Y , die von $\text{span}(e_n, v)$, oder allgemeiner von $\text{span}(u, v)$ geschnitten werden, und s sei die Anzahl der Pivotschritte in Stufe n . Dann gilt:

$$s \leq S$$

$E_{m,n}(S)$ bezeichne den Erwartungswert für S und liefert eine obere Schranke für die mittlere Anzahl der Pivotschritte. Es gilt:

$$\begin{aligned} E_{m,n}(S) &= \text{erwartete Anzahl der } \Delta \text{'s, so daß } \Sigma(\Delta) \text{ Randsimplex von } Y \text{ ist und von} \\ &\quad \text{span}(u, v) \text{ geschnitten wird} \\ &= (\text{Anzahl der Kandidaten für } \Delta) \cdot (\text{Wahrscheinlichkeit, daß der Kandidat} \\ &\quad \Delta = \{1, \dots, n\} \text{ beide Bedingungen erfüllt}) \\ &= \binom{m}{n} \cdot P(\text{KH}(a_1, \dots, a_n) \text{ erfüllt beide Bedingungen}) \\ &= \binom{m}{n} \cdot \int_{\mathbf{R}^n} \dots \int_{\mathbf{R}^n} P(\Sigma(\Delta) \text{ ist Randsimplex}) \cdot P(\Sigma(\Delta) \cap \text{span}(u, v) \neq \emptyset) \\ &\quad dF(a_1) \dots dF(a_n) dF(u) dF(v) \end{aligned}$$

An dieser Stelle nützen wir aus:

$$\begin{aligned} \text{span}(u, v) \cap \text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n}) &\neq \emptyset \iff \\ \exists \text{ zwei Seitensimplizes } \text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{i-1}}, a_{\Delta^{i+1}}, \dots, a_{\Delta^n}) &\quad \text{und} \\ \text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{j-1}}, a_{\Delta^{j+1}}, \dots, a_{\Delta^n}) &\quad \text{mit} \\ \text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{i-1}}, a_{\Delta^{i+1}}, \dots, a_{\Delta^n}) \cap \text{span}(u, v) &\neq \emptyset \quad \text{und} \\ \text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{j-1}}, a_{\Delta^{j+1}}, \dots, a_{\Delta^n}) \cap \text{span}(u, v) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\rightarrow E_{m,n}(S) = \binom{m}{n} \cdot \frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} P(\Sigma(\Delta) \text{ ist Randsimplex}) \cdot \\ P(\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{n-1}}) \cap \text{span}(u, v) \neq \emptyset) dF(a_1) \dots dF(a_n) dF(u) dF(v)$$

Die Auswertung dieser Integralformel ist sehr kompliziert und wird in Borgwardt [1] ausführlich besprochen. Entscheidender Trick dabei ist die Abschätzung des Quotienten

$$\frac{E_{m,n}(S)}{E_{m,n}(Z)} \quad \text{mit}$$

$$E_{m,n}(Z) = \binom{m}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} P(\Sigma(\Delta) \text{ ist Randsimplex}) \cdot P(\mathbb{R}^+ v \cap \Sigma(\Delta) \neq \emptyset) \\ dF(a_1) \dots dF(a_n) dF(u) dF(v).$$

Durch dieses Vorgehen konnte Borgwardt schließlich polynomiales Laufzeitverhalten des Schatteneckenalgorithmus beweisen.

3.3 Bekannte Ergebnisse

In diesem Abschnitt geben wir Ergebnisse an, die wir erhalten, wenn wir die Integralformel für $E_{m,n}(S)$ auswerten. Die Sätze 1–3 werden in Borgwardt [1] ausführlich bewiesen. Mit ähnlichen Beweismethoden kann man dann analog dazu den Satz 4 zeigen. Hier spielen, wie auch im Satz 2, die projizierten Verteilungen, die in den einzelnen Stufen des Gesamtalgorithmus entstehen, eine entscheidende Rolle. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Darstellung der Beweise.

Für alle Verteilungen, die der Bedingung (3.1) gehorchen, gilt:

Satz 1:

$$E_{m,n}(s) \leq E_{m,n}(S) \leq m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^3 \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{e\pi}{2}\right)$$

Satz 2: Der durchschnittliche Aufwand für den Gesamtalgorithmus beträgt höchstens

$$m^{\frac{1}{n-1}} \cdot (n+1)^4 \cdot \frac{2}{5} \pi \cdot \left(1 + \frac{e\pi}{2}\right)$$

Pivotschritte.

Satz 3: Im asymptotischen Fall gibt es eine Funktion $\varepsilon_F(m, n)$ mit $\varepsilon_F(m, n) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ und festes n (F induziert dabei eine Abhängigkeit von der Verteilung), so daß

$$E_{m,n}(s) \leq E_{m,n}(S) \leq m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot (1 + \varepsilon_F(m, n)).$$

Satz 4: Im asymptotischen Fall gibt es eine Funktion $\tilde{\varepsilon}_F(m, n)$ mit $\tilde{\varepsilon}_F(m, n) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ und festes n , so daß der durchschnittliche Aufwand für den Gesamtalgorithmus höchstens

$$m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^3 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot (1 + \tilde{\varepsilon}_F(m, n))$$

Pivotschritte beträgt.

Die Ergebnisse der Sätze 2 und 4 erhalten wir durch die Berechnung der erwarteten Anzahl der in den einzelnen Stufen geschnittenen Randsimplizes. Diese Größen bezeichnen wir mit $E_{m,n}(S^k)$, $k = 2, \dots, n$. Es gilt:

Satz 5:

$$E_{m,n}(S^k) \leq m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{n-1} \cdot (1 + \frac{e\pi}{2}) \cdot \pi, \quad \text{für } k \geq 3,$$

$$E_{m,n}(S^2) \leq m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n \cdot 4$$

im moderaten Fall, und

$$E_{m,n}(S^k) \leq m^{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt{n} \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot (1 + \hat{\varepsilon}_F(m, n)), \quad \text{für } k \geq 3$$

$$E_{m,n}(S^2) \leq m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n \cdot 4$$

im asymptotischen Fall ($\hat{\varepsilon}_F(m, n) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ und festes n).

4. Verbesserung der asymptotischen Schranken

4.1 Geometrische Beobachtungen

In diesem Abschnitt soll nochmals die Geometrie des Schatteneckenalgorithmus untersucht werden, mit dem Ziel, die bestehenden Schranken für den Gesamtalgorithmus zu verbessern.

Beim Übergang von \mathbf{IR}^{k-1} auf \mathbf{IR}^k gemäß Gesamtalgorithmus (2.2), entsteht primal die folgende Situation (vgl. Abb. 6):

Mit \tilde{x}_{k-1} bezeichnen wir den Optimalpunkt von I_{k-1} , der auf einer Kante von X_k liegt. Sei \hat{x}_k eine Ecke auf dieser Kante. Von \hat{x}_k aus bewegen wir uns in Richtung $\pi_k(e_k)$ bis zur $\pi_k(v)$ -optimalen Ecke \tilde{x}_k u.s.w. Um plausibel zu machen, daß diese Vorgehensweise auch das Gewünschte liefert, gehen wir wieder in den Polarraum.

Dort entspricht \tilde{x}_{k-1} einem Randsimplex $\pi_{k-1}(\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{k-1}}))$ im \mathbf{IR}^{k-1} , der von $\mathbf{IR}^+ \pi_{k-1}(v)$ geschnitten wird. Dann ist $\pi_k(\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{k-1}}))$ im Rand von $\pi_k(Y)$ enthalten. $\pi_k(\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{k-1}}))$ ist also Seitensimplex von mindestens einem, aber höchstens zwei Randsimplizes von $\pi_k(Y)$. Es gibt nun einen Vektor a_i , $i \notin \{\Delta^1, \dots, \Delta^{k-1}\}$, so daß $\pi_k(\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{k-1}}, a_i))$ Randsimplex (entspricht primal \hat{x}_k) von $\pi_k(Y)$ ist.

$$\pi_{k-1}(x) := \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{k-1} \end{pmatrix}$$

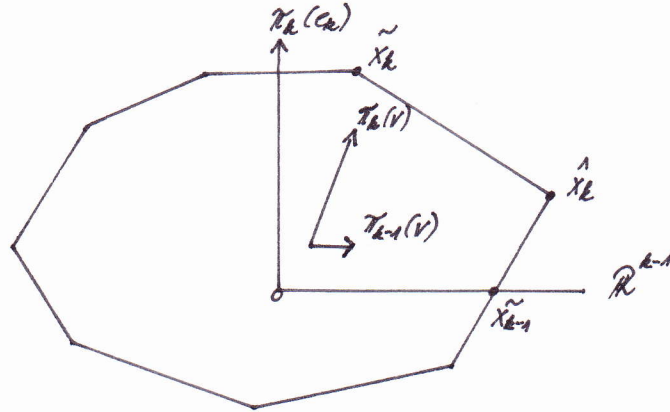


Abb. 6

Der $k - 2$ -dimensionale Randsimplex $\pi_{k-1}(\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{k-1}}))$ von $\pi_{k-1}(Y)$ wurde ja von $\mathbb{R}^+ \pi_{k-1}(v)$ geschnitten. Dann wird natürlich der $k - 2$ -dimensionale Seitensimplex $\pi_k(\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{k-1}})) = \text{KH}(\pi_k(a_{\Delta^1}), \dots, \pi_k(a_{\Delta^{k-1}}))$ des $\pi_k(\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{k-1}}, a_i))$ von $\text{span}(\pi_k(v), \pi_k(e_k))$ geschnitten.

$\text{span}(\pi_k(v), \pi_k(e_k))$ schneidet dann erst recht $\pi_k(\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{k-1}}, a_i))$. Also können wir jetzt den Schatteneckenalgorithmus innerhalb der Ebene $\text{span}(\pi_k(v), \pi_k(e_k))$ anwenden. Wiederholte Durchführung der Prozedur liefert schließlich den optimalen Randsimplex von Y , falls es einen solchen gibt.

ACHTUNG!!!

\hat{x}_k ist nicht notwendigerweise optimal bzgl. $(\pi_{k-1}^{(v)})$ in X_k . Unter Umständen können sogar relativ viele Pivotschritte nötig sein, um von \hat{x}_k zum $(\pi_{k-1}^{(v)})$ -Optimum in X_k zu gelangen, wie Abbildung 7 verdeutlicht. Dabei sind prinzipiell diese zwei Fälle zu unterscheiden.

In beiden Fällen ist der Pfad von \hat{x}_k zum Optimum bzgl. $(\pi_{k-1}^{(v)})$ in X_k verhältnismäßig lang. Im Fall 2 wird dieser Pfad jedoch nicht durchlaufen, da sich der Schatteneckenalgorithmus ausgehend von $(\pi_{k-1}^{(v)})$ direkt in Richtung $\pi_k(v)$ bewegt. Die Anzahl der Pivotschritte im Fall 2 ist demnach wesentlich kleiner als der im Fall 1. Da wir eine **obere** Abschätzung für die Pivotschrittzahl angeben möchten, können wir unsere Betrachtungen auf den ungünstigen Fall 1 beschränken.

Bemerkung 3: Auf der Ebene $\text{span}((\pi_{k-1}^{(v)}), \pi_k(e_k))$ gelangt man zu allen interessanten Stellen, nämlich: \tilde{x}_{k-1} , \hat{x}_k , Optimum bzgl. $(\pi_{k-1}^{(v)})$ in X_k , \tilde{x}_k und e_k .

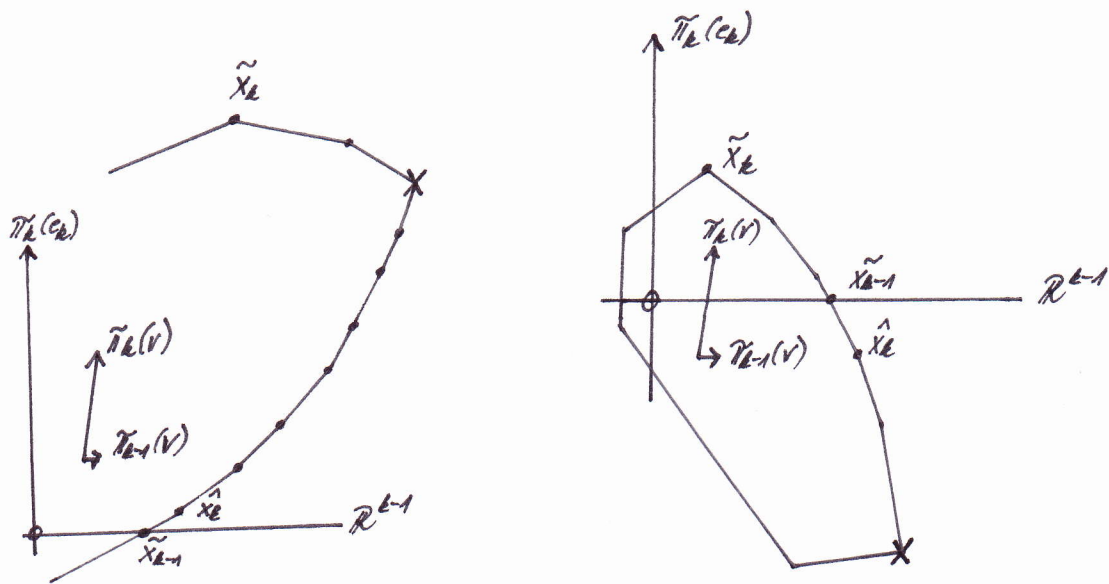


Abb. 7

Um die Anzahl der Pivotschritte des Gesamtalgorithmus zu ermitteln, studieren wir zunächst, was in einer Dimension, sagen wir der k -ten, passiert (vgl. Abb. 7).

Wir können nun den Pfad von \tilde{x}_{k-1} nach \tilde{x}_k in zwei Teilpfade aufteilen (Fall 1!).

Pfad 1: Vom Optimum bzgl. $(\pi_{k-1}^{(v)})$ in X_k zu \tilde{x}_k

Pfad 2: Von \tilde{x}_{k-1} zum Optimum bzgl. $(\pi_{k-1}^{(v)})$ in X_k

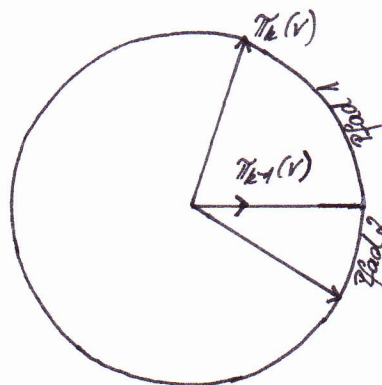


Abb. 8

Satz 5 liefert uns eine obere Schranke für die vom **Vollkreis** geschnittenen Randsimplizes in fester Dimension k .

Darauf aufbauend versuchen wir nun Aussagen über die durchschnittliche Anzahl der von Pfad 1 bzw. Pfad 2 geschnittenen Randsimplizes im Polyeder X_k zu treffen.

4.2 Untersuchungen zu Pfad 1

Wir möchten nun nachweisen, daß die durchschnittliche Anzahl der Randsimplizes, die von $KK(\binom{\pi_{k-1}(v)}{0}, \pi_k(v))$ im Polyeder X_k geschnitten werden, proportional zum Winkel zwischen $\binom{\pi_{k-1}(v)}{0}$ und $\pi_k(v)$ ist, wenn nur eine stochastische Unabhängigkeit zwischen a_1, \dots, a_m und v besteht. Diese Größe bezeichnen wir mit $E_{m,n}(s_{Pfad\ 1}^k)$. Wir können dann den folgenden Satz formulieren.

Satz 6: a_1, \dots, a_m und v gehorchen unserem Verteilungsmodell. Dann gilt:

$$E_{m,n}(s_{Pfad\ 1}^k) = \frac{1}{2} \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot E\left(\arccos\left(\frac{\pi_{k-1}(v) \cdot \pi_k(v)}{\|\pi_{k-1}(v)\| \|\pi_k(v)\|}\right)\right),$$

wobei $E\left(\arccos\left(\frac{\pi_{k-1}(v) \cdot \pi_k(v)}{\|\pi_{k-1}(v)\| \|\pi_k(v)\|}\right)\right)$ der erwartete Winkel zwischen $\binom{\pi_{k-1}(v)}{0}$ und $\pi_k(v)$ ist.

Dieser Satz kann in den folgenden 12 Teilschritten bewiesen werden, auf deren Ausarbeitung hier aus Platzgründen verzichtet wird.

Beweis: Zunächst führen wir für den Beweis wichtige Größen ein.

$$\hat{x} := \pi_k(x)$$

$$\hat{\pi}_{k-1}(x, y) := \frac{x - (x^T y) \cdot y}{\|x - (x^T y) \cdot y\|} \in \mathbb{R}^k$$

$\hat{\pi}_{k-1}(x, y)$ ist der normierte Projektionspunkt von x auf y^\perp (y sei bereits normiert!).

$$\omega_k^+ := \omega_k \cap \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^k \geq 0\} = \omega_k \cap \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^T e_k \geq 0\},$$

wobei $\omega_k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| = 1\}$, also die Oberfläche der Einheitskugel Ω_k im \mathbb{R}^k bezeichnet.

$$\omega_k^+(u) := \omega_k \cap \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^T u \geq 0\}$$

F^k ist die Verteilungsfunktion der projizierten Variablen in Stufe k des Gesamtalgorithmus. Mit I bezeichnen wir die Indikatorfunktion. Durch RS kürzen wir das Ereignis „ $KH(\xi_1, \dots, \xi_k)$ ist Randsimplex“ ab.

$$\kappa_1(x) := KH(\xi_1, \dots, \xi_k) \text{ ist Randsimplex} \wedge$$

$$KK(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \cap KK(\xi_{m+1}, \hat{\pi}_{k-1}(\xi_{m+1}, x)) \cap \omega_k \neq \emptyset$$

$$\kappa_2(M) := M \cap KK(\xi_{m+1}, \hat{\pi}_{k-1}(\xi_{m+1}, \xi_{m+2})) \cap \omega_k \neq \emptyset$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
& E_{m,n}(s_{Pfad1}^k) = \\
&= \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_1(e_k)}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \\
&\stackrel{(i)}{=} \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\omega_k^+(\hat{u})} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_1(\hat{u})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \\
&\stackrel{(ii)}{=} \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_1(\xi_{m+2})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}, \hat{u}) \\
&\quad dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) \\
&\stackrel{(iii)}{=} \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} I_{\kappa_1(\xi_{m+2})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}, \hat{u}) \\
&\quad dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) \\
&\stackrel{(iv)}{=} \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{RS}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m) \cdot \\
&\quad \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} I_{\kappa_2(KK(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}))}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}, \hat{u}) dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) \\
&\stackrel{(v)}{=} \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{RS}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m) \cdot W(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}) \cdot \eta(\text{span}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1})) \\
&\quad dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) \quad \text{mit} \\
&\quad \eta(M) := \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} I_{\kappa_2(M)}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}, \hat{u}) dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) \\
&\stackrel{(vi)}{=} \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{RS}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m) \cdot W(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) \cdot \\
&\quad \eta(\text{span}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1})) \\
&\stackrel{(vii)}{=} \frac{1}{2} \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot \eta(\text{span}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1})) \\
&\stackrel{(viii)}{=} \frac{1}{2} \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} \int_{\omega_k} I_{\xi_1^T \xi_2 > 0 \wedge \xi_1^T \hat{\pi}_{k-1}(\xi_2, \xi_3) < 0}(\delta, \hat{v}, \hat{u}) dF^k(\delta) dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) \\
&\stackrel{(ix)}{=} \frac{1}{2} \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot \int_{\omega_k^+(e_k)} \int_{\omega_k} I_{\xi_1^T \xi_2 > 0 \wedge \xi_1^T \hat{\pi}_{k-1}(\xi_2, e_k) < 0}(\delta, \hat{v}) dF^k(\delta) dF^k(\hat{v}) \\
&\stackrel{(x)}{=} \frac{1}{2} \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot K \cdot \int_0^1 \int_{\omega_k} I_{\kappa_3}(\delta, v^k) dF^k(\delta) (1 - (v^k)^2)^{\frac{k-3}{2}} dv^k \quad \text{und} \\
&\quad K = \frac{\lambda_{k-2}(\omega_{k-1})}{\lambda_{k-1}(\omega_k)} \\
&\quad \kappa_3 := \xi_1^T \left(\frac{e_{k-1} \sqrt{1 - \xi_2^2}}{\xi_2} \right) > 0 \wedge \xi_1^T \hat{\pi}_{k-1} \left(\frac{e_{k-1} \sqrt{1 - \xi_2^2}}{\xi_2}, e_k \right) < 0
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(xi)}{=} \frac{1}{2} \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot K \cdot \int_0^1 \int_{\omega_k} I_{\kappa_4}(\delta, v^k) dF^k(\delta) (1 - (v^k)^2)^{\frac{k-3}{2}} dv^k \quad \text{und}$$

$$\kappa_4 := \frac{\delta^1}{|\delta^2|} > \frac{\sqrt{1 - (v^k)^2}}{v^k} \wedge \delta^2 < 0$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(xii)}{=} \frac{1}{2} \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot K \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - \nu^{k-1}}{2\pi} (\sin \nu^{k-1})^{k-2} d\nu^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot K \cdot E\left(\arccos\left(\binom{\pi_{k-1}(v)}{0}\right), \pi_k(v)\right) \end{aligned}$$

□

Lemma 5: Der erwartete Winkel zwischen $\left(\binom{\pi_{k-1}(v)}{0}\right)$ und $\pi_k(v)$ ist von der Ordnung $O(\frac{1}{\sqrt{k}})$.

Beweis: Der erwartete Winkel hängt nur von v^k ab. Sei o.B.d.A. $\|\pi_k(v)\| = 1$. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \gamma^1 & \sin \gamma^2 & \cdots & \sin \gamma^{k-1} \\ \cos \gamma^1 & \sin \gamma^2 & \cdots & \sin \gamma^{k-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \cos \gamma^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow v^k = \cos \gamma^{k-1} \quad \text{und} \quad \arccos\left(\binom{\pi_{k-1}(v)}{0}\right), \pi_k(v) = 90^\circ - \gamma^{k-1}$$

Die Randverteilung D von γ^{k-1} ist:

$$D(\rho) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^\rho 1 \cdot \sin \gamma^2 \cdots (\sin \gamma^{k-1})^{k-2} d\gamma^{k-1} d\gamma^{k-2} \cdots d\gamma^1}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^\pi 1 \cdot \sin \gamma^2 \cdots (\sin \gamma^{k-1})^{k-2} d\gamma^{k-1} d\gamma^{k-2} \cdots d\gamma^1}$$

Hieraus ergibt sich die Randdichte d für γ^{k-1} als:

$$d(\rho) = \frac{(\sin \rho)^{k-2}}{\int_0^\pi (\sin \gamma^{k-1})^{k-2} d\gamma^{k-1}}$$

Der Einfachheit halber berechnen wir zunächst $E(\cos \gamma^{k-1})$.

$$E(\cos \gamma^{k-1}) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \gamma^{k-1} \cdot (\sin \gamma^{k-1})^{k-2} d\gamma^{k-1}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \gamma^{k-1})^{k-2} d\gamma^{k-1}}$$

Betrachtung des Zählers:

$$\left[\frac{1}{k-1} \cdot (\sin \gamma^{k-1})^{k-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)^{k-1} = \frac{1}{k-1}$$

Betrachtung des Nenners:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k-3}} \geq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-h^2)^{\frac{k-3}{2}} dh = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \gamma^{k-1})^{k-2} d\gamma^{k-1} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k-1}}$$

(vgl. Borgwardt [1])

$$\rightarrow E(\cos^{k-1}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

Es gilt: $E(\cos \gamma^{k-1}) = E(\sin(90^\circ - \gamma^{k-1}))$. Außerdem: $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$, für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\rightarrow E(\cos \gamma^{k-1}) = E(\sin(90^\circ - \gamma^{k-1})) \geq E\left(\frac{2}{\pi}(90^\circ - \gamma^{k-1})\right) = \frac{2}{\pi} E(90^\circ - \gamma^{k-1})$$

$$\rightarrow E(\arccos\left(\frac{\pi_{k-1}(v)}{0}\right), \pi_k(v)) = E(90^\circ - \gamma^{k-1}) \leq \frac{\pi}{2} E(\cos \gamma^{k-1}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

□

Korollar: Die erwartete Pivotschrittzahl im Pfad 1 beträgt im moderaten Fall

$$E(s_{Pfad\ 1}^k) \leq C_1 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n \cdot k \cdot \sqrt{n-1} \quad \text{für } k \geq 2.$$

Für $m \gg n \geq k$ gilt:

$$E(s_{Pfad\ 1}^k) \leq C_2 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt{n} \cdot k \cdot (1 + \hat{\varepsilon}_F(m, n))$$

$\hat{\varepsilon}_F(m, n)$ ist dabei die Funktion aus Satz 5. C_1 und C_2 sind von m und n unabhängige Konstanten.

4.3 Untersuchungen zu Pfad 2

In Abbildung 9 stellen wir die primale Situation im Pfad 2 noch einmal dar.

O.B.d.A. gelte: (4.1)

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(a_1)^T x_\Delta = 1 & & \pi_k(a_1)^T x_{\Delta'} = 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_k(a_{k-1})^T x_\Delta = 1 & \text{und} & \pi_k(a_{k-1})^T x_{\Delta'} = 1 \\ \pi_k(a_k)^T x_\Delta = 1 & & \pi_k(a_k)^T x_{\Delta'} < 1 \\ \pi_k(a_{k+1})^T x_\Delta < 1 & & \pi_k(a_{k+1})^T x_{\Delta'} = 1 \end{array}$$

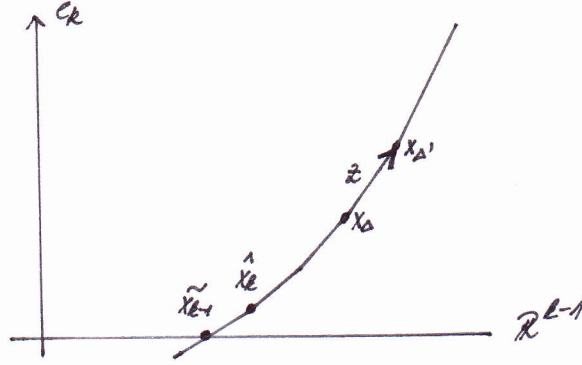


Abb. 9

Wir setzen: $z := x_{\Delta'} - x_{\Delta} \in \mathbb{R}^k$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 \pi_k(a_1)^T z &= 0 \\
 &\vdots \\
 \pi_k(a_{k-1})^T z &= 0 \\
 \pi_k(a_k)^T z &< 0 \\
 \pi_k(a_{k+1})^T z &> 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Außerdem gilt:

- $\begin{pmatrix} \pi_{k-1}(v) \\ 0 \end{pmatrix}^T x_{\Delta} > 0$, da der Ursprung zulässig ist, und die Zielfunktion bereits verbessert wurde.
- $\begin{pmatrix} \pi_{k-1}(v) \\ 0 \end{pmatrix}^T x_{\Delta} < \begin{pmatrix} \pi_{k-1}(v) \\ 0 \end{pmatrix}^T x_{\Delta'}$, da die Zielfunktion von x_{Δ} nach $x_{\Delta'}$ ansteigt.
 $\rightarrow \begin{pmatrix} \pi_{k-1}(v) \\ 0 \end{pmatrix}^T z > 0$
- $e_k^T x_{\Delta} > 0$, da $e_k^T \tilde{x}_{k-1} = 0$ und $e_k^T x$ auf dem Weg von \tilde{x}_{k-1} nach x_{Δ} vergrößert wurde.
- $e_k^T x_{\Delta} < e_k^T x_{\Delta'}$, da wir uns auf $\text{span}(\begin{pmatrix} \pi_{k-1}(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \pi_k(v))$ in Richtung $\pi_k(e_k)$ bewegen, und $e_k^T x$ optimiert werden soll. $\rightarrow e_k^T z > 0$.

Wir erhalten also die folgenden notwendigen geometrischen Bedingungen für die Entstehung von Pfad 2.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \pi_{k-1}(v) \\ 0 \end{pmatrix}^T x_{\Delta} &> 0 & \begin{pmatrix} \pi_{k-1}(v) \\ 0 \end{pmatrix}^T z &> 0 \\
 e_k^T x_{\Delta} &> 0 & e_k^T z &> 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
E_{m,n}(s_{Pfad\ 2}^k) &\leq \\
&\leq \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_5}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
&\quad \cdot I_{\kappa_7 \wedge \kappa_8}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_6}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
&\quad \cdot I_{\kappa_7}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_6}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
&\quad \cdot I_{x_{\Delta}^T e_k > 0}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \stackrel{(4.5)}{=}
\end{aligned}$$

Setze $\tilde{\sigma} := \text{span}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \cap [\text{KK}(e_k, \hat{\pi}_{k-1}(\xi_{m+1}, -e_k), -e_k)] \cap \omega_k$,

$\kappa_9(\mu) := \text{KH}(\xi_1, \dots, \xi_k)$ ist Randsimplex $\wedge \tilde{\sigma} \in \text{KK}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \wedge 0 \leq \text{arc}(-e_k, \tilde{\sigma}) \leq \mu$,

$\kappa_{10}(\mu) := \text{KH}(\xi_1, \dots, \xi_k)$ ist Randsimplex $\wedge \tilde{\sigma} \in \text{KK}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \wedge \pi \geq \text{arc}(-e_k, \tilde{\sigma}) > \mu$,

$\kappa_{11}(\mu) := \text{KH}(\xi_1, \dots, \xi_k)$ ist Randsimplex $\wedge \tilde{\sigma} \in \text{KK}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \wedge \pi \geq \text{arc}(x_{\Delta}, \tilde{\sigma}) \geq \mu$.

Mit h bezeichnen wir den Abstand der Hyperebene durch die Punkte ξ_1, \dots, ξ_k vom Ursprung.

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(4.5)}{=} \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_9(\frac{\pi}{2})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
&\quad \cdot I_{x_{\Delta}^T e_k > 0}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_9(\frac{\pi}{2})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
&\quad \cdot I_{\text{arc}(x_{\Delta}, \tilde{\sigma}) \geq \frac{\pi}{2} - \text{arc}(-e_k, \tilde{\sigma})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_9(\frac{\pi}{2}) \wedge \text{arc}(-e_k, \tilde{\sigma}) + \text{arc}(x_{\Delta}, \tilde{\sigma}) \geq \frac{\pi}{2}}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
&\quad dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \stackrel{(4.6)}{\leq}
\end{aligned}$$

Für jedes $q \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt aber:

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(4.6)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \left[\int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_9(q) \wedge \text{arc}(x_{\Delta}, \tilde{\sigma}) \geq \frac{\pi}{2} - q}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_{10}(q)}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \left[\int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_{11}(\frac{\pi}{2} - q)}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_{10}(q)}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v})] \\
& \leq \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{RS \wedge h \leq \cos(\frac{\pi}{2} - q)}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
& \quad \cdot dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \tag{4.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_{10}(q)}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
& \quad dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst das Integral (4.7). Für jedes **fest**e $\tilde{q} < 1$ geht die Anzahl der Randsimplizes mit $h \leq \cos(\frac{\pi}{2} - \tilde{q})$ **asymptotisch** gegen 0. Deshalb verschwindet (4.7) im asymptotischen Fall.

Nun wollen wir das Integral (4.8) weiter vereinfachen. Dazu modifizieren wir die Schnittbedingung und erhalten:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_{12}(-e_k, \xi_{m+1})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
& \quad dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v})
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\kappa_{12}(\mu, \zeta) &:= \text{KH}(\xi_1, \dots, \xi_k) \text{ ist Randsimplex } \wedge \\
& \quad \text{KK}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \cap \\
& \quad \text{KK}[(\cos q) \cdot \mu + (\sin q) \cdot \hat{\pi}_{k-1}(\zeta, \mu), \hat{\pi}_{k-1}(\xi_{m+1}, \mu)] \\
& \quad \cap \omega_k \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle führen wir die ersten 10 Teilschritte analog zum Beweis des Satzes 6 durch. Wir benötigen hierzu die Größen:

$$\begin{aligned}
\kappa_{13}(M) &:= M \cap \text{KK}[(\cos q) \cdot \xi_{m+2} + (\sin q) \cdot \hat{\pi}_{k-1}(\xi_{m+1}, \xi_{m+2}), \hat{\pi}_{k-1}(\xi_{m+1}, \xi_{m+2})] \\
& \quad \cap \omega_k \neq \emptyset \\
\bar{q}(\mu, \zeta) &:= (\cos q) \cdot \mu + (\sin q) \cdot \hat{\pi}_{k-1}(\zeta, \mu)
\end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\omega_k^+} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_{12}(-e_k, \xi_{m+1})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
& dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \\
& \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\omega_k^+(\hat{u})} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_{12}(\hat{u}, \xi_{m+1})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}) \\
& dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) \\
& \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{\kappa_{12}(\xi_{m+2}, \xi_{m+1})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}, \hat{u}) \\
& dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) \\
& \stackrel{(iii)}{=} \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} I_{\kappa_{12}(\xi_{m+2}, \xi_{m+1})}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}, \hat{u}) \\
& dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) \\
& \stackrel{(iv)}{=} \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{RS}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m) \cdot \\
& \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} I_{\kappa_{13}(KK(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}))}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}, \hat{u}) dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) \\
& \stackrel{(v)}{=} \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{RS}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m) \cdot W(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}) \cdot \bar{\eta}(\text{span}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1})) \\
& dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) \quad \text{mit} \\
& \bar{\eta}(M) := \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} I_{\kappa_{13}(M)}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{v}, \hat{u}) dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) \\
& \stackrel{(vi)}{=} \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{k}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{RS}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m) \cdot W(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}) dF^k(\hat{a}_1) \dots dF^k(\hat{a}_m) \cdot \\
& \bar{\eta}(\text{span}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1})) \\
& \stackrel{(vii)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot \bar{\eta}(\text{span}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1})) \\
& \stackrel{(viii)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot \int_{\omega_k} \int_{\omega_k^+(\hat{u})} \int_{\omega_k} I_{\xi_1^T \bar{q}(\xi_3, \xi_2) > 0 \wedge \xi_1^T \hat{\pi}_{k-1}(\xi_2, \xi_3) < 0}(\delta, \hat{v}, \hat{u}) \\
& dF^k(\delta) dF^k(\hat{v}) dF^k(\hat{u}) \\
& \stackrel{(ix)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot \int_{\omega_k^+(e_k)} \int_{\omega_k} I_{\xi_1^T \bar{q}(-e_k, \xi_2) > 0 \wedge \xi_1^T \hat{\pi}_{k-1}(\xi_2, -e_k) < 0}(\delta, \hat{v}) dF^k(\delta) dF^k(\hat{v}) \\
& \stackrel{(x)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - q}{2\pi}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$E_{m,n}(s_{Pfad 2}^k) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot E_{m,n}(S^k) \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - q}{2\pi}, \quad q \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

q kann nun so groß gewählt werden, daß gilt:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - q}{2\pi} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot C_3,$$

wobei C_3 eine von m und n unabhängige Konstante ist.

Dadurch erreichen wir:

$$E_{m,n}(s_{Pfad\ 2}^k) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot C_3 \cdot E_{m,n}(S^k), \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

□

Für den asymptotischen Fall erhalten wir das folgende Gesamtergebnis.

Theorem 1: Für $m \rightarrow \infty$ gilt:

Die erwartete Pivotschrittzahl von Pfad 1 und Pfad 2 in Stufe k ist höchstens

$$C_4 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt{n} \cdot k \cdot (1 + \hat{\varepsilon}_F(m, n)).$$

Die erwartete Pivotschrittzahl für den Gesamtalgorithmus beträgt höchstens

$$C_5 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^{\frac{5}{2}} \cdot (1 + \delta_F(m, n)),$$

wobei C_4 und C_5 von m und n unabhängige Konstanten sind und $\delta_F(m, n) \rightarrow \infty$ für $m \rightarrow \infty$ und festes n . $\hat{\varepsilon}_F(m, n)$ ist die Funktion aus Satz 4.

Beweis: Betrachten wir zuerst die Pivotschrittzahl s^k in einer einzelnen Stufe k . Aus dem Korollar zu Satz 6 und dem Satz 7 erhalten wir für den asymptotischen Fall:

$$\begin{aligned} E_{m,n}(s^k) &= E_{m,n}(s_{Pfad\ 1}^k) + E_{m,n}(s_{Pfad\ 2}^k) \leq \\ &C_2 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt{n} \cdot k \cdot (1 + \hat{\varepsilon}_F(m, n)) + C_3 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt{n} \cdot k \cdot (1 + \hat{\varepsilon}_F(m, n)) = \\ &C_4 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt{n} \cdot k \cdot (1 + \hat{\varepsilon}_F(m, n)) \end{aligned}$$

Um die erwartete Pivotschrittzahl für den Gesamtalgorithmus zu erhalten, müssen wir die Pivotschritte in den einzelnen Stufen $k = 2, \dots, n$ addieren.

$$\sum_{k=2}^n C_k \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt{n} \cdot k \cdot (1 + \hat{\varepsilon}_{F,k}(m, n)) \leq C_5 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^{\frac{5}{2}} \cdot (1 + \delta_F(m, n))$$

Dabei sei $\hat{\varepsilon}_{F,k}(m, n)$ eine Funktion, die sowohl von der Verteilung F als auch von der Stufe k abhängt, und für die gilt $\hat{\varepsilon}_{F,k}(m, n) \rightarrow \infty$ (vgl. Definition von $\hat{\varepsilon}_F(m, n)$). □

5. Unterschranken für den Gesamtalgorithmus

Am Beispiel der Gleichverteilung auf der Sphäre zeigen wir, daß Verteilungen existieren, deren asymptotische Unterschranken gleich den eben gewonnenen generellen asymptotischen Oberschranken sind. Damit ist es nicht möglich, universell, d.h. für alle rotationssymmetrischen Verteilungen, die asymptotische Oberschranke zu verbessern.

In diesem Kapitel beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 8: $a_1, \dots, a_m, u, v \in \mathbb{R}^n$ seien auf der Sphäre ω_n gleichverteilt, und $m \rightarrow \infty$. Die erwartete Anzahl der Randsimplizes, die in den einzelnen Stufen des Gesamtalgorithmus von der jeweiligen zweidimensionalen Ebene $\text{span}(\pi_k(v), \pi_k(e_k))$, $k = 2, \dots, n$ geschnitten werden, ist mindestens

$$C_6 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^3.$$

C_6 ist eine von m und n unabhängige Konstante.

Wir berechnen zunächst die erwartete Anzahl der geschnittenen Randsimplizes in einer Stufe k , $k \in \{2, \dots, n\}$. Der Spezialfall $k = n$ ist bereits in Borgwardt [1] behandelt. Hier liegt die Gleichverteilung auf der Sphäre vor. Wie in den Beweisen zu den Sätzen 2 und 4, müssen wir für die Stufen $k = 2, \dots, n-1$ wieder die **projizierten** Verteilungen der Gleichverteilung auf der Sphäre betrachten. Dabei ist zu anmerken, daß sich für kleiner werdende k die Dichte immer mehr um den Ursprung konzentriert.

Satz 9: $a_1, \dots, a_m, u, v \in \mathbb{R}^n$ seien auf der Sphäre ω_n gleichverteilt und $m \rightarrow \infty$. $E_{m,n}(S^k)$ ist mindestens

$$C_7 \cdot m^{\frac{1}{n-1}} \cdot k^2.$$

C_7 ist von m und n unabhängig.

Beweis zu Satz 9: Wir betrachten den Quotienten $\frac{E_{m,n}(S^k)}{E_{m,n}(Z^k)}$. Dabei ist $E_{m,n}(Z^k)$ die erwartete Anzahl von Randsimplizes der Stufe k , die vom Strahl \mathbb{R}^+v geschnitten werden. Im asymptotischen Fall und unter unserem Verteilungsmodell strebt diese Größe gegen 1 (vgl. Borgwardt[1], S. 197). Deshalb spiegelt obiger Quotient die erwartete Anzahl der geschnittenen Randsimplizes in Stufe k wieder.

Zunächst sind einige Definitionen nötig.

Mit f bezeichnen wir die Dichte der Gleichverteilung auf der Sphäre ω_n , mit f^k die Dichte, die daraus in Stufe k , also durch Projektion auf den \mathbb{R}^k , im Gesamtalgorithmus (2.2) entsteht. λ_{k-2} ist das $n-2$ -dimensionale Lebesgue-Maß.

Die Vektoren c_i erhält man aus den Inputvektoren a_i durch zweifache Rotation. Zunächst werden a_1, \dots, a_m auf b_1, \dots, b_m transformiert, so daß

$$b_1^n = h, \dots, b_n^n = h.$$

Danach werden die b_1, \dots, b_m zu c_1, \dots, c_m , so daß

$$\begin{aligned} c_1^n &= h, \dots, c_n^n = h \\ c_1^{n-1} &= \theta, \dots, c_{n-1}^{n-1} = \theta. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir:

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= (c_i^1, \dots, c_i^k)^T \\ \bar{\hat{c}}_i &= (c_i^1, \dots, c_i^{k-1})^T \\ \bar{\bar{\hat{c}}}_i &= (c_i^1, \dots, c_i^{k-2})^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k) &= \frac{\lambda_k \{ \text{KK}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k) \cap \Omega_k \}}{\lambda_k(\Omega_k)} \\ W(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}) &= \frac{\lambda_{k-1} \{ \text{KK}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}) \cap \Omega_k \}}{\lambda_{k-1}(\Omega_{k-1})} \end{aligned}$$

Dabei sei Ω_k die Einheitskugel im \mathbb{R}^k .

$G_k(h)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Komponente eines Vektors \hat{c}_i unserer Verteilung höchstens h ist. $g_k(h)$ ist die Ableitung von $G_k(h)$ nach h . Man kann leicht zeigen, daß $G_k(h) = G_n(h)$ und $g_k(h) = g_n(h)$ für alle $k \in \{2, \dots, n\}$ gilt.

Wir erhalten die folgende Formel (vgl. Borgwardt[1], S. 209):

$$\frac{E_{m,n}(S^k)}{E_{m,n}(Z^k)} = k.$$

$$\frac{\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} |\theta - c_k^{k-1}| \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}))^2}{\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} |\theta - c_k^{k-1}| \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}))^2}.$$

$$\frac{W(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}) f^k(\hat{c}_1) \dots f^k(\hat{c}_{k-1}) d\bar{\bar{\hat{c}}}_1 \dots \bar{\bar{\hat{c}}}_{k-1} d\theta f^k(\hat{c}_k) d\bar{\hat{c}}_k dh}{V(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k) f^k(\hat{c}_1) \dots f^k(\hat{c}_{k-1}) d\bar{\bar{\hat{c}}}_1 \dots \bar{\bar{\hat{c}}}_{k-1} d\theta f^k(\hat{c}_k) d\bar{\hat{c}}_k dh} \stackrel{(5.1)}{=}.$$

Für genügend großes h ($h \rightarrow 1$ für $m \rightarrow \infty$) gelten folgende Beziehungen (vgl. Borgwardt [1], S. 210):

$$\begin{aligned} V(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k) &= \frac{h}{k} \cdot \frac{|\theta - c_k^{k-1}|}{k-1} \cdot \frac{\lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}))}{\lambda_k(\Omega_k)} \cdot (1 + \gamma(h)) \\ W(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}) &= \frac{h}{k-1} \cdot \frac{\lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}))}{\lambda_{k-1}(\Omega_{k-1})} \cdot (1 + \eta(h)) \\ &\text{mit } \gamma(h), \eta(h) \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} |\theta - c_k^{k-1}| \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}))^2 \cdot \\
& W(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}) f^k(\hat{c}_1) \dots f^k(\hat{c}_{k-1}) d\bar{\bar{\hat{c}}}_1 \dots \bar{\bar{\hat{c}}}_{k-1} d\theta f^k(\hat{c}_k) d\bar{\hat{c}}_k \geq \\
& \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} |c_k^{k-1}| \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}))^2 \cdot \\
& W(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}) f^k(\hat{c}_1) \dots f^k(\hat{c}_{k-1}) d\bar{\bar{\hat{c}}}_1 \dots \bar{\bar{\hat{c}}}_{k-1} d\theta f^k(\hat{c}_k) d\bar{\hat{c}}_k
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \frac{E_{m,n}(S^k)}{E_{m,n}(Z^k)} \rightarrow \geq \frac{k^2 \cdot \lambda_k(\Omega_k)}{\lambda_{k-1}(\Omega_{k-1})} \cdot \\
& \frac{\int_0^1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |c_k^{k-1}| f^k(\hat{c}_{k-1}) d\bar{\hat{c}}_k \right\} G_k(h)^{m-k}}{\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} |\theta - c_k^{k-1}|^2} \cdot \\
& \frac{\int_0^{\sqrt{1-h^2}} \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}))^3}{\int_{\mathbb{R}^{k-2}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-2}} \lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{k-1}))^3} \cdot \\
& \frac{f^k(\hat{c}_1) \dots f^k(\hat{c}_{k-1}) d\bar{\bar{\hat{c}}}_1 \dots \bar{\bar{\hat{c}}}_{k-1} d\theta dh}{f^k(\hat{c}_1) \dots f^k(\hat{c}_{k-1}) d\bar{\bar{\hat{c}}}_1 \dots \bar{\bar{\hat{c}}}_{k-1} d\theta f^k(\hat{c}_k) d\bar{\hat{c}}_k dh} \stackrel{(5.2)}{=}
\end{aligned}$$

Wir nützen aus:

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} |c_k^{k-1}| f^k(\hat{c}_k) d\hat{c}_k = \frac{2\lambda_{n-3}(\omega_{n-2})}{(n-2)\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} \cdot g(h) \cdot \sqrt{1-h^2}$$

Außerdem machen wir im Zähler und Nenner die zweite Koordinatentransformation rückgängig, so daß wir wieder die b -Vektoren bekommen.

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5.2)}{=} \frac{k^2 \cdot \lambda_k(\Omega_k)}{\lambda_{k-1}(\Omega_{k-1})} \cdot \frac{2\lambda_{n-3}(\omega_{n-2})}{(n-2)\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} \cdot \\
& \frac{\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \sqrt{1-h^2} \cdot g(h) \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{k-1}))^2}{\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-1}} (k-1)^2 \cdot \lambda_{k-1}(\text{KH}(\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k))^2} \cdot \\
& \frac{f^k(\hat{b}_1) \dots f^k(\hat{b}_{k-1}) d\bar{\bar{\hat{b}}}_1 \dots \bar{\bar{\hat{b}}}_{k-1} dh}{f^k(\hat{b}_1) \dots f^k(\hat{b}_{k-1}) d\bar{\bar{\hat{b}}}_1 \dots \bar{\bar{\hat{b}}}_{k-1} f^k(\hat{b}_k) d\bar{\bar{\hat{b}}}_k dh} \stackrel{(5.3)}{=}
\end{aligned}$$

Für den Nenner benutzen wir (vgl. Borgwardt [1], S. 137):

$$\lambda_{k-1}(\text{KH}(\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k)) = \frac{|det B|}{(k-1)!} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^{k-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_k^1 & \dots & b_k^{k-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Für den Zähler berücksichtigen wir, daß gilt (vgl. Borgwardt [1], S. 210):

$$W(\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{k-1}) = \frac{h}{k-1} \cdot \frac{\lambda_{k-2}(\text{KH}(\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{k-1}))}{\lambda_{k-1}(\Omega_{k-1})} \cdot (1 + \eta(h))$$

mit $\eta(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 1$

Daraus folgt:

$$\frac{E_{m,n}(S^k)}{E_{m,n}(Z^k)} \rightarrow \geq (k!)^2 \cdot \lambda_k(\Omega_k) \cdot \frac{2\lambda_{n-3}(\omega_{n-2}) \cdot \lambda_{k-1}(\Omega_{k-1})}{(n-2)\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \cdot \sqrt{1-h^2} \cdot g(h) \cdot \Lambda_2(h) dh}{\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \cdot \Lambda_1(h) dh}$$

mit $\Lambda_1(h) := \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |det B|^2 f^k(\hat{b}_1) \dots f^k(\hat{b}_{k-1}) f^k(\hat{b}_k) d\bar{b}_1 \dots d\bar{b}_k$

und $\Lambda_2(h) := \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^{k-1}} [W(\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{k-1})]^2 f^k(\hat{b}_1) \dots f^k(\hat{b}_{k-1}) d\bar{b}_1 \dots d\bar{b}_{k-1}$

Wir definieren eine weitere Größe.

$$g_{2,k}(h) := g_k(h) \cdot E((x^1)^2 | x^k = h)$$

Auch hier haben wir die Beziehung $g_{2,k}(h) = g_{2,n}(h)$. Falls $g_{2,k}(h)$ für alle $h \in (0, \infty)$ existiert, gilt im asymptotischen Fall (vgl. Borgwardt[1], S. 194):

$$\Lambda_1(h) = k! \cdot g_{2,k}(h)^{k-1} \cdot g_k(h)$$

$$\Lambda_2(h) = \frac{1}{\lambda_{k-1}(\Omega_{k-1})^2 \cdot (k-1)!} \cdot g_{2,k}(h)^{k-2} \cdot g_k(h) \cdot \left(\frac{g_{2,k}(h)}{g_k(h)} + (k-1) \right)$$

Unter Benutzung dieses Ergebnisses erhalten wir:

$$\frac{E_{m,n}(S^k)}{E_{m,n}(Z^k)} \rightarrow \geq \frac{2 \cdot k \cdot \lambda_k(\Omega_k) \cdot \lambda_{n-3}(\omega_{n-2})}{(n-2) \cdot \lambda_{k-1}(\Omega_{k-1}) \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} \cdot \frac{\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \cdot \sqrt{1-h^2} \cdot g_k(h)^2 \cdot g_{2,k}(h)^{k-2} \cdot \left(\frac{g_{2,k}(h)}{g_k(h)} + (k-1) \right) dh}{\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \cdot g_{2,k}(h)^{k-1} \cdot g_k(h) dh} \quad (5.4)$$

Setze

$$\Phi(h) = 1 - G_k(h).$$

Man kann nun zeigen, daß es eine Funktion $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\alpha(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 1$, so daß $g_{2,k}(h) = \Phi(h) \cdot (1 + \alpha(h))$ (vgl. Borgwardt[1], S. 198).

Wir betrachten zunächst das Integral

$$\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \cdot g_{2,k}(h)^{k-1} \cdot g_k(h) dh.$$

Nach Substitution von $1 - G_k(h)$ und $g_{2,k}(h)$ durch $\Phi(h)$ wird daraus

$$\int_0^1 (1 - \Phi(h))^{m-k} \cdot \Phi(h)^{k-1} d\Phi(h).$$

Dieses Integral besitzt den Wert

$$\frac{1}{k \cdot \binom{m}{k}}.$$

Das Zählerintegral von (5.4) schreiben wir als Summe

$$\int_0^1 G_k(h)^{m-k} \cdot \sqrt{1-h^2} \cdot g_k(h) \cdot g_{2,k}(h)^{k-1} dh + \quad (5.5)$$

$$(k-1) \int_0^1 G_k(h)^{m-k} \cdot \sqrt{1-h^2} \cdot g_k(h)^2 \cdot g_{2,k}(h)^{k-2} dh. \quad (5.6)$$

Für die Gleichverteilung auf der Sphäre ist bekannt (vgl. Borgwardt[1], S. 211):

$$G_k(h) = G_n(h) = 1 - \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot \int_h^1 (1 - \sigma^2)^{(n-3)/2} d\sigma \quad (5.7)$$

$$g_k(h) = g_n(h) = \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot (1 - h^2)^{(n-3)/2} \quad (5.8)$$

$$g_{2,k}(h) = g_{2,n}(h) = \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{(n-1)\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot (1 - h^2)^{(n-1)/2} \quad (5.9)$$

Wir setzen nun (5.9) in (5.5) ein, führen dann eine Substitution mit Φ durch, und erhalten als untere Schranke für (5.5)

$$\left[\frac{(n-1) \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n)}{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} \right]^{1/(n-1)} \cdot \frac{\left(\frac{m+1}{k+1} \right)^{(n-2)/(n-1)}}{(k+1) \cdot \binom{m+1}{k+1}}. \quad (5.10)$$

Für (5.6) benötigen wir (5.8) und (5.9), substituieren wiederum in obiger Weise, und erhalten schließlich als untere Schranke für (5.6)

$$(k-1) \cdot (n-1)^{(n-1)/(n-2)} \cdot \left[\frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \right]^{1/(n-1)} \cdot \frac{\left(\frac{m}{k}\right)^{1/(n-1)}}{k \cdot \binom{m}{k}}. \quad (5.11)$$

(5.10) und (5.11) in (5.4) eingesetzt liefert

$$\frac{E_{m,n}(S^k)}{E_{m,n}(Z^k)} \rightarrow \geq C_7 \cdot m^{1/(n-1)} \cdot k^2.$$

□

Jetzt ist es einfach, Satz 8 zu beweisen.

Beweis zu Satz 8: Wir summieren nur über die Stufen $k = 2, \dots, n$ des Gesamtalgorithmus.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n C_k \cdot m^{1/(n-1)} \cdot k^2 &\geq C_6 \cdot m^{1/(n-1)} \cdot \sum_{k=2}^n k^2 \geq \\ C_6 \cdot m^{1/(n-1)} \cdot \int_1^n \mu^2 d\mu &\geq C_6 \cdot m^{1/(n-1)} \cdot n^3 \end{aligned}$$

□

Theorem 2: a_1, \dots, a_m, v seien auf der Sphäre ω_n des \mathbb{R}^n gleichverteilt. Dann beträgt der durchschnittliche Gesamtaufwand im asymptotischen Fall mindestens

$$C_8 \cdot m^{1/(n-1)} \cdot n^{\frac{5}{2}}$$

Pivotschritte.

Beweis: Wir argumentieren wieder mit den Pfaden 1 und 2. Aus Satz 6 und Lemma 5 ist bekannt, daß man im Pfad 1 einer jeden Stufe den Faktor \sqrt{k} einsparen kann. Aus dem Beweis zu Satz 7 folgt, daß der Pfad 2 asymptotisch verschwindet. Wie in Satz 8 summieren wir wieder über alle Stufen $k = 2, \dots, n$ unter Verwendung des Ergebnisses von Satz 9 und erhalten das gewünschte Resultat. □

6. Schlußbemerkung

Im asymptotischen Fall haben wir nun gezeigt, daß die Oberschranken für die Pivotschrittzahl **global** nicht mehr verbesserungsfähig sind. Als nächstes Ziel könnte man sich stecken, für einzelne Klassen von Verteilungen bessere Abschätzungen zu berechnen, und dadurch eine Klassifikation von Verteilungen vorzunehmen.

Ganz offen gelassen wurde der moderate Fall, d.h. das Verbessern der Ober- und Unterschranken, falls sich die Anzahl der Restriktionen in einer kleineren Größenordnung bewegt.

Dies dürfte noch wesentlich schwieriger werden als im asymptotischen Fall, da die Untersuchungen für **alle** Dimensionspaare (m, n) und **alle** rotationssymmetrischen Verteilungen durchgeführt werden müssen.

Literatur:

- [1] Borgwardt, K. H.: The Simplex Method, A Probabilistic Analysis, Springer-Verlag, Heidelberg, 1987
- [2] Gass, S., Saaty, Th.: The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function, Naval Research Logistics Quarterly 2, 1955, 39–45
- [3] Küfer, K.: Asymptotische Varianzanalysen in der stochastischen Polyedertheorie, Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1992